Raumvorstellung als eine zentrale Kognition für die Zahlenverarbeitung und das Rechnen sowie deren Einordung in das mathematikdidaktische Grundvorstellungskonzept

KARL-HEINZ GRASS, GRAZ

Zahlen und räumliches Vorstellungsvermögen sind für die meisten von uns zwei getrennte Bereiche, mit wenigen, bis keinen Interferenzen. Denken Sie an die Rechenaufgabe 3+8 und an eine simple Würfeldrehaufgabe, wie sie oft bei Intelligenztests oder auch im Quiz-Teil von Zeitschriften vorkommt. Der vorliegende Beitrag geht der Frage nach, warum die Fähigkeit solche Würfeldrehaufgaben zu meistern auch für das Lösen der oben genannten Rechnung von Bedeutung ist. Konkret wird der Zusammenhang zwischen Zahlenverständnis und visuell-räumlicher Kognition auf Basis bisheriger kognitions- und neurowissenschaftlicher Evidenz dargestellt und ein Bogen zum Grundvorstellungsbegriff gespannt. Letzteres dient dazu, die Relevanz von Ergebnissen aus der Bezugsdisziplin Psychologie für die Mathematikdidaktik hervorzuheben und Parallelstrukturen sichtbar zu machen.

1 Einleitung, Begriffsdefinitionen und Ziele des Beitrags

In den letzten beiden Dekaden wurden zahlreiche Ergebnisse zum Zusammenhang zwischen visuell-räumlichen Fähigkeiten (synonym dazu wird im Beitrag von Raumvorstellung gesprochen) und Mathematik im Allgemeinen publiziert (vgl. Casey et al. 1995; Verdine et al. 2017). Raumvorstellung ermöglicht es uns, mental mit räumlichen Objekten zu operieren, diese beispielsweise zu bewegen und in Beziehung zueinander zu setzen (vgl. Newcombe & Shipley 2015; Uttal et al. 2013). Da diese räumlichen Fähigkeiten im Alltag von zentraler Bedeutung sind, etwa beim Einrichten einer Wohnung oder beim Navigieren von einem Ort zu einem anderen, steht die Erforschung dieses Kognitionsbereichs seit mehr als hundert Jahren im Fokus der Psychologie (vgl. Bethell-Fox & Shepard 1988; Carroll 1993; Linn & Petersen 1985; Shepard & Metzler 1971). Historisch wurde dabei einerseits der Einfluss von Raumvorstellung auf das handwerkliche Geschick untersucht (Cox 1928; Paterson et al. 1930) und andererseits repräsentiert die Raumvorstellung von Beginn an einen Faktor der menschlichen Intelligenz (Carroll 1993; Thurstone & Thurstone 1941).

Zusammenhänge zwischen Raumvorstellung und mathematischer Leistung wurden mittlerweile in allen Altersgruppen nachgewiesen (z. B. Casey et al. 1995; Delgado & Prieto 2004; Verdine et al. 2017). Beispielsweise schneiden Grundschulkinder mit besseren Leistungen bei mentalen Rotationsaufgaben auch bei mathematischen Argumentations- und Begründungsproblematiken besser ab (Geer et al. 2019). Dasselbe Ergebnis zeigte sich bei Sekundarstufenschüler*innen (Delgado & Prieto 2004) und auch bei Studierenden im MINT-Bereich (Casey et al. 1995). Jüngere Studien von Verdine et al. (2017) sowie von Zhang et al. (2014) konnten zudem nachweisen, dass visuell-räumliche Fähigkeiten auch nach Kontrolle von domänenunspezifischen Faktoren (also Kognitionen, die nicht spezifisch für Mathematik sind) wie Intelligenz, Sprache und Exekutivfunktionen (z. B. Arbeitsspeicher) prädiktiv valide für spätere mathematische Leistungen sind.

Neben der leistungsbasierten Evidenz zum Zusammenhang zwischen Raumvorstellung und Mathematik konnte in den letzten zwanzig Jahren gezeigt werden, dass es auch kognitive und neuronale Überlappungen zwischen den beiden Bereichen gibt (Gunderson et al. 2012; Mix & Cheng 2012; Hawes & Ansari 2020). Hier wurde ob der hohen volkswirtschaftlichen Relevanz der Dyskalkulieforschung insbesondere der Zusammenhang zwischen Raumvorstellung und Zahlenverarbeitung und dem damit verbundenen Rechnen untersucht (Parsons & Bynner 2005; Gross et al. 2009; Vogel & De Smedt 2021). Auch im vorliegenden Beitrag wird dieser spezifische Zusammenhang zwischen Raumvorstellung und der Verarbeitung von Zahlen fokussiert. Zudem wird vorausgeschickt, dass es eine ausführlichere Onlineversion des Beitrags gibt, auf die im vorliegenden, kürzeren Druckartikel, an einigen Stellen verwiesen wird.

1.1 Zahlenverarbeitung und deren Basisrepräsentationen

Zahlen mögen uns zwar als eine einzige Entität erscheinen, sobald wir aber eine Zahl sehen oder hören aktivieren wir zahlreiche Basisrepräsentationen, die uns beispielsweise Auskunft über die numerische Größe der Zahl oder die Einordnung der Zahl am Zahlenstrahl geben (Nuerk et al. 2006). Beim Lösen von komplexen Rechenaufgaben müssen diese Basisrepräsentationen problemlos miteinander interagieren. Diese Zahlenrepräsentationen, die zur soliden Verarbeitung numerischer Information notwendig sind und die Basis für das spätere Rechnen darstellen, werden in der Literatur als Zahlenverarbeitung oder basisnumerische Fähigkeiten subsummiert (Landerl et al. 2022, S. 26).

Es gibt zahlreiche Modelle zur Zahlenverarbeitung, die hier nicht erschöpfend dargestellt werden (z. B. Dehaene 1992; Dehaene & Cohen 1995; McCloskey 1992; McCloskey et al. 1985; Campbell & Clark 1992; Verguts et al. 2005; Nuerk & Willmes 2004). Das wichtigste Modell, das auch hier bedient wird und die Basis vieler anderer Modelle ist, ist jenes von Stanislas Dehaene (1992; verfeinert und modifiziert in Dehaene et al. 2005). In seinem Triple-Code-Modell postuliert Dehaene drei Basisrepräsentationen von Zahlen, eine *verbale Repräsentation*, eine *visuelle Repräsentation* und eine *semantische Größenrepräsentation.*

Bei der *verbalen Repräsentation* einer Zahl geht es darum, mit dem gesprochenen oder auditiv gehörten Zahlwort, z. B. „fünf“, etwas anfangen zu können. Die verbale Repräsentation einer Zahl ist zudem in der kindlichen Entwicklung der erste Zugang zu Zahlen. Hörende Kinder zählen bereits im Vorschulalter und sagen die Zahlwortreihe bis 10 oder 100 problemlos auf, ohne die numerische Größe der gesprochenen Zahlen zu kennen. Eine Besonderheit dieser Zahlenrepräsentation ist zudem, dass ihr auch das Wissen um Multiplikationsfakten des kleinen Einmaleins zugeordnet wird. Ergebnisse zeigen, dass erwachsene Proband*innen, die Schwierigkeiten bei der Benennung von Zahlen haben, auch Probleme beim Abruf von Multiplikationsfakten aufweisen (Dehaene et al. 2005). Durch den Einsatz bildgebender Verfahren wie beispielsweise der funktionellen Magnetresonanztomographie (fMRT), wo Gehirnaktivitäten indirekt durch die Messung des Sauerstoffbedarfs erfasst werden, konnten Delazer et al. (2003) nachweisen, dass beim Abruf von Multiplikationsfakten (z. B. 3x6) andere Gehirnareale aktiv sind als bei komplexen Multiplikationen (z. B. 13x25). Dabei handelt es sich beim Abruf der Multiplikationsfakten um den linken Gyrus angularis, wo auch die verbale Verarbeitung von Zahlen verortet ist.

Unter der *visuellen Repräsentation* von Zahlen wird verstanden, dass die Ziffern 0 bis 9 als bedeutungshaltige Symbole wahrgenommen werden. Denken wir z. B. an die asiatischen Zahlzeichen, die wir nicht kennen, dann ist es einsichtig, dass das Wissen um die Bedeutung der arabischen Ziffern die Basis für das Rechnen ist. Im Unterschied zur verbalen Zahlenrepräsentation, wo der gehörten oder gesprochenen Zahl eine Bedeutung zugeordnet wird, ist es hier die in arabischen Symbolen geschriebene Zahl, der eine wohldefinierte numerische Bedeutung zugeschrieben wird. Neuroanatomisch wird die visuelle Zahlenrepräsentation im Gyrus Fusiformis bilateral angenommen (Nuerk et al. 2006, S. 148).

Die *semantische Größenrepräsentation* ermöglicht es uns, die numerische Größe einer Zahl zu verstehen. Diese Repräsentation wird automatisch nonverbal aktiviert, sobald wir eine Zahl sehen oder hören. Damit gelingt es uns, Zahlen nach deren numerischer Größe zu ordnen, zu vergleichen, Überschlagsrechnungen durchzuführen, zu schätzen oder beispielsweise auch die Position von Zahlen am Zahlenstrahl zu bestimmen. Dieser Basisrepräsentation kommt im vorliegenden Beitrag besondere Bedeutung zu, da die semantische Repräsentation räumliche Aspekte bedient. So spricht man in der Literatur vom mentalen Zahlenstrahl (*mental number line*, kurz MNL), wonach Zahlen auf einem (im mitteleuropäischen Kulturkreis von links nach rechts orientierten) Zahlenstrahl enkodiert werden (Dehaene 2013).

Hier zeigt sich, dass Zahlen einer räumlichen Repräsentation unterliegen. Graß und Krammer (2018) konnten diesbezüglich in ihrer Studie mit 102 Grundschulkindern nachweisen, dass Raumvorstellung zwar direkt und signifikant an der Vorhersage der Rechenleistung beteiligt ist, dieser Einfluss jedoch über die basisnumerischen Fähigkeiten mediiert wird. Dieser Erklärungsansatz zum Zusammenhang zwischen Raum uns Zahl wird in Abschnitt 2.1 aufgegriffen und detailliert analysiert.

Eine weitere zentrale Erkenntnis bisheriger Forschungsarbeiten zur Zahlenverarbeitung ist, dass die Entwicklung numerischer und arithmetischer Fähigkeiten keinesfalls auf einem kognitiven Mechanismus oder auf ein Gehirnareal beschränkt werden kann, sondern dass ein komplexes multidimensionales Netzwerk etabliert werden muss, um kompetent rechnen zu können (Fias et al. 2013). Bei komplexen Rechnungen müssen die involvierten Gehirnareale miteinander interagieren. Das entsprechende neuronale Netzwerk und die assoziierten Funktionen interagieren dabei variabel und hochkomplex, um effiziente und flexible Rechenstrategien zu erlauben. Damit sich dieses neuronale Netzwerk ausbilden kann, sind zahlreiche Faktoren wie genetische Veranlagung (Kovas & Plomin 2006), Alter (Ansari & Dhital 2006), Entwicklungsstand (Sommerauer et al. 2020), Ausbildung (Brod et al. 2017) und andere Umwelteinflüsse wie der sozioökonomische Status (Hackman & Farah 2009) ausschlaggebend.

Auf neuro- und kognitionswissenschaftlicher Ebene wird dieses für das Verstehen von Zahlen und das Rechnen notwendige Netzwerk in zwei Bereiche gegliedert. Auf der einen Seite gibt es *domänenspezifische* Fähigkeiten, das sind jene Funktionen, die in spezifischem Zusammenhang zum Rechnen stehen (z. B. Mengenverständnis, Ordinalitätsverständnis, basisnumerische Fähigkeiten) (Lyons et al. 2016; Nieder & Dehaene 2009). Andererseits benötigen wir zum Rechnen auch *domänenübergreifende* Fähigkeiten. Bei Letzteren handelt es sich um Funktionen, die nicht nur für das Rechnen spezifisch sind, sondern generell zum Lernen oder beispielsweise beim Schriftspracherwerb benötigt werden (z. B. Arbeitsspeicher, Intelligenz und Raumvorstellung) (Szücs et al. 2014). Die neuronale Entwicklung dieser domänenspezifischen und domänenübergreifenden Funktionen ist ein dynamischer Prozess, der stark von der Art und Weise des Lernens und des Unterrichts abhängig ist. Beispielsweise führt ein spezifisches spielerisches Training im Kindergarten (z. B. Würfelspiele) zu einer funktionellen Verbindung der relevanten Gehirnareale (Brod et al. 2017; Jolles et al. 2016; Kucian et al. 2011). Ferner konnte gezeigt werden, dass es beim Übergang von einer spielerischen Vermittlung im Kindergarten zu einer eher formalen Beschulung in der ersten Klasse Grundschule zu unterschiedlichen Aktivitätsmustern bei domänenübergreifenden Prozessen (z. B. das temporäre Behalten von Information in unserem Gedächtnis) kommt, die Art und Weise des Unterrichts also großen Einfluss auf die Entwicklung der entsprechenden neuronalen Funktionen hat (Brod et al. 2017).

Zusammenfassend kann auf Basis der oben referierten Literatur postuliert werden, dass das Verständnis von Zahlen und das Rechnen ein hochkomplexer Vorgang in unserem Gehirn ist, der sich unterschiedlichen Gehirnarealen bedient (siehe Abb. 2). Dabei spielen sowohl domänenspezifische Funktionen als auch domänenübergreifende Funktionen sowie Umweltfaktoren wie der sozioökonomische Status und die Art und Weise der Beschulung und des Unterrichts eine Rolle (siehe Abb. 1).

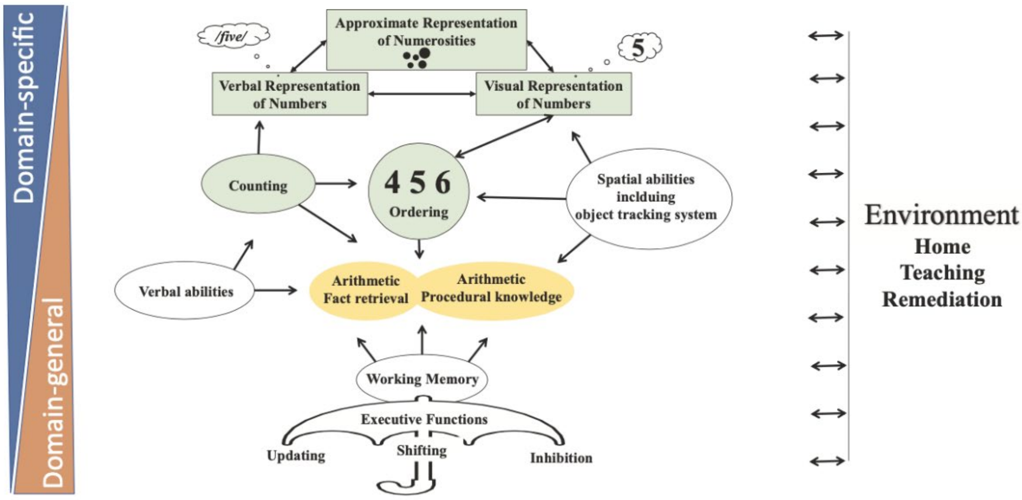

Abb. 1: Dynamische Interaktionen domänenspezifischer und domänenübergreifender Funktionen die für die Entwicklung von Zahlenverständnis (grün) und Rechnen (gelb) notwendig sind. Die approximative Repräsentation von Zahlen (semantische Größenrepräsentation), die visuelle Repräsentation und die verbale Repräsentation bilden das Triple-Code-Modell ab. Hilfsfunktionen wie visuell-räumliche und verbale Fähigkeiten sind gleichsam wie der Arbeitsspeicher in weiß dargestellt. Die Pfeile deuten ein- oder wechselseitige Einflüsse an (Vogel & De Smedt 2021, S. 2).

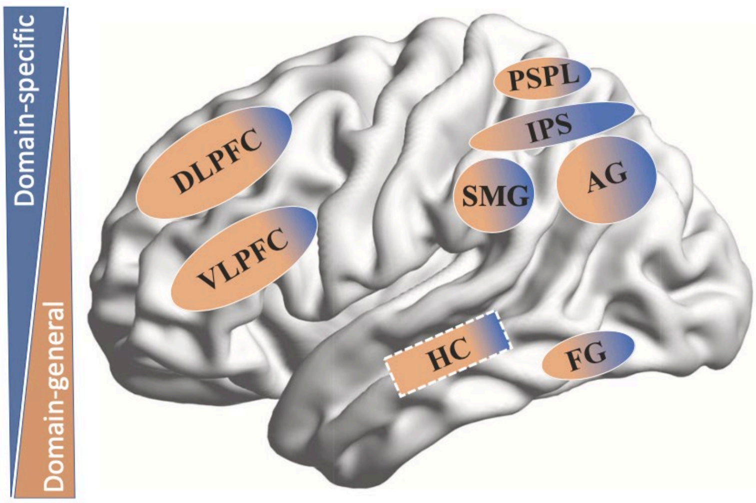

Abb. 2: Gehirnregionen des beim kompetenten Rechnen benötigten Netzwerks. Die blaue und orange Farbcodierung zeigt den relativen Einfluss der jeweiligen Gehirnregion an domänenübergreifenden und domänenspezifischen Funktionen. DLPFC = Dorsolateraler präfrontaler Kortex, VLPFC = Ventrolateraler präfrontaler Kortex, PSPL = Posteriorer superiorer Parietallappen, IPS = Intraparietaler Sulcus, SMG = Gyrus supramarginalis, AG = Gyrus angularis, FG = Gyrus fusiformis, HC = Hippocampus (die strichlierte Line deutet die mediale Position an) (Vogel & De Smedt 2021, S. 5).

1.2 Mentale Repräsentationen und Grundvorstellungen

Das zweite Ziel dieses Beitrags liegt darin, die in 1.1 dargestellten Ergebnisse aus der Kognitions- und Neurowissenschaft mit der Mathematikdidaktik zu verbinden und vorhandene Parallelen aufzuzeigen. In den letzten Jahren hat sich eine mathematikdidaktische Diskussion etabliert, bei der die zwei Ansätze, nämlich der psychologische und der stoffdidaktische Ansatz, zum Wissen über Zahlen in eine seltsame

Opposition gelangen (Lorenz 2017, S. 125). Da die Psychologie eine zentrale Bezugsdisziplin für die Mathematikdidaktik ist, erscheint es jedoch notwendig, die Ergebnisse aus der Kognitions- und Neurowissenschaft wohlwollend aufzugreifen, mit bestehenden mathematikdidaktischen Konzepten abzugleichen, die beiden Ansätze sinnvoll zu verbinden, empirisch zu prüfen und in die Praxis zu transferieren. Letzteres ist aus Sicht des Autors auch eine der Kernaufgaben der Mathematikdidaktik. Um dieser Forderung nachzukommen, zeigt der vorliegende Artikel am Beispiel der Aneignung des Zahlenverständnisses, dass es zu den mentalen Repräsentationen von Zahlen (z. B. der mentale Zahlenstrahl) durchaus ein Pendant aus der Mathematikdidaktik gibt, und zwar das Konzept der Grundvorstellungen.

Im Allgemeinen spricht man in der Kognitionspsychologie dann von mentalen Repräsentationen, wenn es darum geht, Repräsentanten von gedanklichen Konstrukten zu beschreiben. Gedankliche Konstrukte werden in der Mathematikdidaktik auch häufig als Begriffe oder Ideen bezeichnet und sind zeitlose Entitäten (Griesel et al. 2019). Beispiele solcher gedanklichen Konstrukte sind etwa die natürlichen Zahlen oder Dreiecke. Eine mentale Repräsentation des gedanklichen Konstrukts der natürlichen Zahlen ist dabei der mentale Zahlenstrahl, eine mentale Repräsentation des gedanklichen Konstrukts Dreieck wäre das innere Bild einer Dreieckszeichnung (Griesel et al. 2019, S. 125). Anhand dieser Beispiele wird erkennbar, dass wir für das Verstehen solcher abstrakten gedanklichen Konstrukte mentale Repräsentanten benötigen. Der Umgang mit einem gedanklichen Konstrukt besteht in der Regel häufig darin, dass an einem mentalen Repräsentanten mental operiert wird (Griesel et al. 2019, S. 126). Gedanken benötigen stets eine Repräsentationsform, sie fallen nicht vom Himmel (etwa durch eine Instruktion des Gedankens) und schweben dann im abstrakten, platonischen Raum, bis sie benötigt werden, um Ideen zu erkennen (Lorenz 2017, S. 129). Die allgemeinen (wohlbekannten) Formate dieser Repräsentationen sind enaktiv, ikonisch und symbolisch (vgl. Bruner 1964; Seel 2003, S. 61; Morra et al. 2008, S. 27). Die enaktiven Repräsentationen gedanklicher Konstrukte sind dabei die Bausteine, die „building blocks“ wie sie Rumelhart (1980) bezeichnete, für jede weitere kognitive Entwicklung. Enaktive Repräsentationsschemata werden durch (wiederholte) Handlungen an konkreten Materialien (in der Mathematikdidaktik Erarbeitungs- oder weniger treffend Anschauungsmaterial genannt) generiert. Ein Beispiel dazu wäre etwa das Arbeiten mit dekadischen Stellenwertmaterialien (meist aus Holz) in der Grundschule, um eine enaktive Repräsentation des dezimalen Stellenwertsystems zu erzeugen. An dieser Stelle fällt auf, dass jedwede Handlung an konkreten Materialien zum Aufbau enaktiver Repräsentationsformen eng mit Raumvorstellung verbunden ist. Der Übergang zu ikonischen oder auch zu symbolischen Repräsentationsformen kann nur gelingen, wenn die konkrete Handlung nicht mehr ausgeführt werden muss und in der Anschauung vorstellbar ist (Booth & Siegler 2008). Letzteres bedarf visuell-räumlicher Fähigkeiten, da die Handlung nun ja nicht mehr ausgeführt wird und Handlungsergebnisse durch rein mentales operieren vorausgesagt werden. Die Handlung wird in der Vorstellung vollzogen (Lorenz 2017, S. 129). Durch die building blocks etablieren sich zentrale Begriffsstrukturen, die die Wissensbestände der Kinder ausmachen („Central Conceptual Structures“, CCS, Case & Okamoto 1996). Aus den anfänglich isolierten Konzepten der building blocks bilden sich durch die Änderung von Repräsentationsformaten umfassendere Strukturen aus. So wird etwa aus der verbalen Repräsentationsform der natürlichen Zahlen (in Form der Zahlwortreihe) durch eine Repräsentationsänderung eine anschauliche lineare Sequenz, der mentale Zahlenstrahl. Dadurch wird auch schnell klar, dass beispielsweise die Hundertertafel nicht als logische Repräsentationsänderung der Zahlwortreihe angesehen werden kann (Morra et al. 2008, S. 210 ff). Diese Umorganisationen von Repräsentationen werden im kognitionspsychologischen RR-Modell von Karmiloff-Smith (1992) genauer beschrieben und sind für die Mathematikdidaktik insofern relevant, als dass darin Lernphasen beschrieben werden, die jedes Lernen durchlaufen.

Zusammenfassend beschreibt die Kognitionspsychologie in ihren Ansätzen die Genese gedanklicher Konstrukte durch die Umorganisation von Repräsentationen (Lorenz 2017, S. 130). Sie liefert Evidenz, wie solche mentalen Repräsentationen zu gedanklichen Konstrukten aus der logischen Entwicklung des

Kindes aussehen und wie die Basis in Form der building blocks aus konkreten Handlungen heraus aufgebaut werden muss (vgl. z. B. Shrager & Siegler 1998). Nun ist es aber keineswegs so, dass der Mathematikdidaktik mentale Repräsentationen fremd sind, diese sind seit Jahrzehnten Thema und werden in Form von Grundvorstellungen beschrieben (Griesel et al. 2019, S. 125).

1.3 Ziele des Beitrags

Im Sinne der oben dargelegten Ergebnisse, werden in Abschnitt 2 drei zentrale Erklärungsansätze zum Zusammenhang von Raumvorstellung und Zahlenverarbeitung beschrieben. Dabei wird in 2.1 der mentale Zahlenstrahl als Bindeglied zwischen visuell-räumlicher Kognition und basaler Zahlenverarbeitung dargestellt, in 2.2 werden Ergebnisse aus der Neuropsychologie referiert, die zeigen, dass insbesondere der Parietallappen nicht ausschließlich für die Zahlenverarbeitung und das Rechnen zuständig ist, sondern auch für nichtnumerische Funktionen wie räumliche Fähigkeiten und Aufmerksamkeit (Landerl et al. 2022, S. 48f). In 2.3 wird schließlich gezeigt, dass dem visuell-räumlichen Arbeitsspeicher eine zentrale Rolle bei der Verarbeitung von Zahlen und beim Rechnen im Allgemeinen zukommt. Die Darstellung der Erklärungsansätze erfolgt hier in abgekürzter Weise und ist in der Onlineversion ausführlich nachzulesen.

Der dritte Abschnitt widmet sich der friedvollen Annäherung von mentalen Repräsentationen und Grundvorstellungen. Dabei wird beschrieben, wie die Relation zwischen gedanklichem Konstrukt und mentaler Repräsentation aufgebaut sein muss, um auch fachmathematisch zu entsprechen. Abschließend wird gezeigt, dass Grundvorstellungen nichts anderes sind als mentale Repräsentationen mathematischer Objekte (und damit gedanklicher Konstrukte). Damit wird auch verdeutlicht, dass das Zusammenführen psychologischer und mathematikdidaktischer Ansätze in der Science Community der Mathematikdidaktik thematisiert wird (Griesel et al. 2019, S. 128).

Im vierten Abschnitt werden die referierten Erkenntnisse zusammengefasst und es wird erläutert, warum es, ob der hier dargelegten Literatur einmal mehr sinnvoll ist, dem Raumvorstellungsunterricht in der Praxis genügend Platz einzuräumen.

2 Erklärungsansätze zum Zusammenhang zwischen Raumvorstellung, Zahlenverarbeitung und dem Rechnen

2.1 Der mentaler Zahlenstrahl

In diesem Abschnitt wird der Frage nachgegangen, wie Menschen Zahlen denken, wie damit operiert wird und warum es dabei einen Zusammenhang zur Raumvorstellung gibt.

Zahlen, wir beschränken uns hier auf natürliche Zahlen, sind abstrakte Begriffe (also gedankliche Konstrukte) die eines Repräsentationsformats bedürfen. Auf Basis bisheriger Ergebnisse, wird davon ausgegangen, dass Zahlen räumlich und zumindest in unserer mitteleuropäischen Kultur, von links nach rechts orientiert gedacht werden (Lindemann & Fischer 2015). Diese mentale Repräsentationsform von Zahlen wird in der Literatur als mentaler Zahlenstrahl (mental number line) bezeichnet und stellt im vorliegenden Beitrag gleichsam den ersten Erklärungsansatz des Zusammenhangs zwischen Zahl und Raum dar. Nun stellt sich die logisch nächste Frage, welche Evidenz es dafür gibt, dass Zahlen längs eines solchen mentalen Zahlenstrahls räumlich enkodiert werden. Die Antwort darauf liefern zwei mehrfach replizierte Effekte, nämlich der *SNARC-Effekt* („spatial numerical association of response codes", auf Deutsch: räumlich-numerische Assoziation des Antwortcodes) und der *Distanzeffekt*. Eine detaillierte Beschreibung der beiden Effekte findet sich in der Onlineversion des Artikels.

Ein weiteres Indiz für den mentalen Zahlenstrahl und die dadurch postulierte räumliche Orientierung der Zahlen sind Untersuchungen von Neglektpatient*innen. Neglekt tritt nach einer rechtshirnigen parietalen Schädigung auf, ist eine meist temporäre neurologische Störung und äußert sich dadurch, dass Betroffene die linke Raumhälfte vernachlässigen. Die Symptome werden etwa beim Lesen, beim Schreiben oder auch bei Alltagsaktivitäten wie Essen oder Körperpflege sichtbar. Ein klassisches Diagnoseinstrument zur Identifizierung eines Halbseitenneglekts sind Linienbisektionsaufgaben. Hier sollen die Patient*innen die Mitte einer präsentierten Strecke kennzeichnen. Neglektpatient*innen zeigen dabei einen systematischen Fehler, der sich durch die Verschiebung der Mitte nach rechts äußert. Begründet wird der Fehler durch die Tatsache, dass sie die linke Raumhälfte – also auch den linken Teil der zu halbierenden Strecke – nicht wahrnehmen. In einer viel beachteten Studie mit Neglektpatient*innen konnten Zorzi und Kolleg*innen (2002) zeigen, dass sich auch bei verbal formulierten Zahlenbisektionsaufgaben („Welche Zahl liegt genau zwischen 2 und 6?“) ähnliche systematische Fehler zeigen wie bei der Linienbisektionsaufgabe. Neglektpatient*innen ignorieren dabei offenbar die linke Hälfte des mentalen Zahlenstrahls und antworten beispielsweise auf die obige Aufgabe mit „fünf“. Diese Ergebnisse sprechen, wie auch der Distanzeffekt im Allgemeinen, zweifellos dafür, dass Zahlen räumlich, über einen von links nach rechts orientierten mentalen Zahlenstrahl repräsentiert sind.

Zusammenfassend lässt sich ableiten, dass die Kognitions- und Neuropsychologie in den letzten 25 Jahren vielfältige und ständig replizierte Ergebnisse hervorgebracht hat, die dafürsprechen, dass Zahlen räumlich in Form einer mental number line gedacht werden (Ward 2006; Lindemann & Fischer 2015; Roggeman et al. 2015; van Dijck et al. 2015; Fias & Fisher 2005). In stark abgekürzter und dem Entwicklungsverlauf der Kinder angepasster Form kann in Anlehnung an Lorenz (2017) festgehalten werden, dass

- Zahlen bereits im Vorschulalter räumlich entsprechend einer linearen Zahlenstrahlvorstellung repräsentiert sind (Patro et al. 2015),
- sich diese Repräsentationsform im Grundschulalter weiter elaboriert (Lyons et al. 2015; Dietrich et al. 2015),
- der mentale Zahlenstrahl trainierbar ist und in höheren Grundschulklassen zu besseren Rechenleistungen führt (Siegler & Ramani 2008; Fischer et al. 2011, 2013; Fischer und Möller 2014; Moeller et al. 2015; Obersteiner et al. 2013; Kucian et al. 2011; Judd & Klingberg 2021),
- und dass diese Repräsentationsform eine universelle ist, die lediglich in ihrer Orientierung von kulturellen Einflüssen abhängt (Nuerk et al. 2005; Göbel et al. 2011; Reinert et al. 2015a, 2015b).

Innerhalb der Kognitions- und Neuropsychologie gelten die hier referierten Ergebnisse mittlerweile als gesichert. Es kann also ob des SNARC- und des Distanzeffekts sowie der Studien mit Neglektpatient*innen davon ausgegangen werden, dass die Repräsentation von Zahlen in unserem Kopf räumlich in Form eines Zahlenstrahls verankert ist.

Diese Beziehung zwischen Raum und Zahl über den mentalen Zahlenstrahl wird, wie in 1.1 bereits angedeutet, im Triple-Code-Modell von Dehaene (1999) als semantische Größenrepräsentation abgebildet. Daneben gibt es noch die Repräsentationen als Worte bzw. Ziffern, die im Triple-Code-Modell entsprechend als verbales bzw. visuelles Modul implementiert sind.

2.2 Neuronale Grundlagen räumlicher und numerischer Kognitionen

Neben der bisher dargelegten behavioralen Evidenz zur Assoziation zwischen Zahlenverarbeitung und Raumvorstellung widmet sich dieser Abschnitt der Frage, ob es auch neurowissenschaftliche Ergebnisse gibt, die für eine enge Verbindung zwischen Zahl- und Raumvorstellung sprechen.

Historische Fallstudien und die Rolle des linken Gyrus angularis

Neurowissenschaftlich wurde schon sehr früh eine Verbindung zwischen Raum und Zahl angenommen, da Läsionen im Parietallappen zu gemeinsamen Beeinträchtigungen numerischer und visuell-räumlicher Funktionen führten (Gerstmann 1940; Holmes 1918; Stengel 1944). Beim, nach dem Entdecker benannten, Gerstmann Syndrom, kam es etwa bei einem Patienten nach einer Läsion in der Nähe des Gyrus angularis (lokalisiert im Parietallappen) zu einer Rechenstörung, die mit einer Fingeragnosie, einer Agraphie (Schreibstörung) sowie einer Rechts-links-Störung gepaart war (Gerstmann 1940). Es gibt mittlerweile Evidenz dazu, dass das Hauptdefizit beim Gerstmann Syndrom darin liegt, dass Patient*innen Probleme bei der mentalen Manipulation von Bildern haben, insbesondere bei der mentalen Rotation von Objekten (Mayer et al. 1999). Diese Fallstudien suggerieren bereits einen potenziellen neuronalen Zusammenhang zwischen der visuell-räumlichen Verarbeitung und numerischen Kognitionen im Gyrus angularis. Dieser Verdacht wurde in jüngeren Studien mittels transkranieller Magnetstimulation (TMS), einer Methode, bei der temporäre Läsionen künstlich durch starke Magnetfelder evoziert werden, bestätigt. So konnte in Studien nachgewiesen werden, dass Disruptionen im linken Gyrus angularis zu Beeinträchtigungen des mentalen Zahlenstrahls führen (Cattaneo et al. 2009; Göbel et al. 2006; Göbel et al. 2001). In jüngeren Studien häufen sich jedoch die Ergebnisse, dass der Gyrus angularis eher für verbale numerische Funktionen verantwortlich ist (für eine Übersicht vgl. Polspoel et al. 2017). Unter diesen verbalen numerischen Funktionen werden etwa gesprochene/gehörte Zahlwörter oder auch arithmetisches Faktenwissen (wie z. B. das Einmaleins) verstanden. Diese Ergebnisse widersprechen der Hypothese, dass der Gyrus angularis ein Gehirnareal ist, das sowohl für numerische als auch für räumliche Funktionen zuständig ist. Die tatsächliche Rolle des linken Gyrus angularis im neuronalen Netzwerk der Zahlenverarbeitung kann heute am besten durch das Triple-Code Modell von Dehaene (1992; 2005) erklärt werden. Im Triple-Code Modell werden dem linken Gyrus angularis verbale Repräsentationen (also das verbale Modul) zugeordnet (siehe auch 1.1), während dem intraparietalen Sulcus (IPS) die Mengenverarbeitung und auch der mentale Zahlenstrahl, also die semantische Größenrepräsentation, zugeschrieben werden (Dehaene & Cohen 1997; Dehaene et al. 2005). Die Zuschreibung des linken Gyrus angularis zu verbalen symbolischen Zahlenfunktionen konnte in einer jüngeren fMRT-Studie rezipiert werden (Sokolowski 2017). Zudem konnte in der Meta-Analyse von Zacks (2008) nachgewiesen werden, dass es bei mentalen Rotationsaufgaben zu keiner funktionellen Aktivität des linken Gyrus angularis kam, sehr wohl zeigten sich jedoch funktionelle Aktivitäten in frontalen (bilateral) und parietalen Arealen.

In Anbetracht der referierten Befundlage wird aktuell davon ausgegangen, dass der linke Gyrus angularis eine maßgebliche Rolle bei der verbalen Zahlenverarbeitung spielt, wohingegen der Zusammenhang zwischen numerischen und räumlichen Kognitionen dem IPS und frontalen Gehirnregionen zugeordnet wird. Demnach werden im weiteren Verlauf des Beitrags die letztgenannten Gehirnareale fokussiert.

Der IPS – Eine zentrale Gehirnregion für numerische und räumliche Größen

Der intraparietale Sulcus (IPS) ist sowohl für die Erforschung der Zahlenverarbeitung und des Rechnens als auch für Wissenschaftler*innen die sich mit der Frage der visuell-räumlichen Kognition beschäftigen von zentraler Bedeutung. Die Ansprüche und Ziele der beiden Forschungsrichtungen hinsichtlich des IPS sind dabei jedoch kontrovers. Die Ergebnisse seitens der Forscher*innen, die sich mit der Entwicklung der numerischen Kognition beschäftigen, sprechen dafür, dass der IPS das zentrale Gehirnareal für die Mengenverarbeitung ist, das heißt, dass der IPS jene Gehirnregion ist, in der die semantische Größenrepräsentation des Triple-Code-Modells verortet ist (Butterworth 1999; Dehaene et al. 2005). Dem gegenüber sprechen die Resultate der Raumvorstellungsforschung dafür, dass im IPS visuell-räumliche Transformationen, also z. B. mentale Rotationen verarbeitet werden (Jordan et al. 2001; Zacks 2008). Diese Differenzen hinsichtlich der Ergebnisse rühren mit großer Wahrscheinlichkeit aus der Tatsache, dass die Beforschung des IPS von beiden Disziplinen isoliert passiert und bisher wenig Austausch stattfand. Im Folgenden werden zentrale Ergebnisse beider Disziplinen kurz vorgestellt, um einen Einblick in die aktuelle Forschungslage hinsichtlich des IPS zu bekommen. Eine ausführliche Darstellung der Forschungslage findet man in der Onlineversion.

Sieht man sich den Zugang seitens der numerischen Beforschung des IPS an, kann festgehalten werden, dass dessen Rolle hinsichtlich der Zahlenverarbeitung seit gut zwei Jahrzehnten fokussiert wird. Daraus entstand ausreichend Evidenz, die zeigt, dass der IPS sowohl bei symbolischen („3“ oder „drei“) als auch bei non-symbolischen (∴) Aufgaben aktiv ist. Diese Tatsache, dass der IPS unabhängig vom dargebotenen Zahlenformat (z. B. Hören der Zahl „drei“ oder Sehen des Symbols „3“) Aktivität zeigt, legt nahe, dass im IPS eine abstrakte und vollautomatische Repräsentation der Zahl abläuft, was der semantischen Größenrepräsentation des Triple-Code Modells von Dehaene entspricht. Konkret heißt das, dass wir, selbst wenn wir nur eine Zahl sehen oder hören (ohne damit zu operieren), automatisch an eine numerische Größe denken.

Hervorzuheben ist, dass der IPS abgesehen von domänenspezifischen Kognitionen auch eine wichtige Hirnregion für die Verarbeitung nichtnumerischer Funktionen, wie räumliche Fähigkeiten, Lichtstärke, Aufmerksamkeit oder Zeit ist (Kadosh et al. 2008; Sokolowski et al. 2017, Hubbard et al. 2005; Simon et al. 2002). Beispielsweise zeigt der IPS nicht nur beim Größenvergleich zweier Zahlen Aktivität, sondern auch beim Längenvergleich zweier Strecken (Pinel et al. 2004). Im Jahr 2003 formulierte Vincent Walsh eine bis heute sehr einflussreiche Hypothese, die sogenannte ATOM-Hypothese („A theory of magnitude“). Darin wird postuliert, dass der Parietallappen nicht zahlenspezifisch ist, sondern dass Zahlenverarbeitung nur ein Aspekt einer umfangreichen Größenrepräsentation ist. Zusätzlich zu numerischen Größen zählen auch räumliche und zeitliche Größen zu dieser umfassenden Größenrepräsentation (Walsh 2003). Seit der Publikation von Walsh gibt es zahlreiche empirische Befunde, die die ATOM-Hypothese bestätigen. Eine der Arbeiten, die für die ATOM-Hypothese sprechen, ist die prominente Publikation von Cohen Kadosh und Kollegen (2005) zum Distanzeffekt und zum mentalen Zahlenstrahl. Die Arbeit zeigt recht eindrucksvoll, dass der Distanzeffekt nicht nur beim Zahlenvergleich, sondern auch beim Vergleich räumlicher Größen sowie beim Vergleich von Helligkeiten auftritt.

Neben diesen allgemeinen Größenrepräsentationen, zu denen auch räumliche Größen zählen, stellt sich die Frage, ob der IPS auch an spezifischeren räumlichen Kognitionen (wie z. B. mentaler Rotation) beteiligt ist. Die Frage kann wie folgt beantwortet werden: Obwohl die neuronalen Prozesse mentaler Rotationsaufgaben isoliert von numerischen Prozessen untersucht wurden suggeriert die bestehende Literatur Überlappungen parietaler Bereiche, die bei numerischen Aufgaben und bei Aufgaben zur mentalen Rotation aktiv sind. Die größte Evidenz einer solchen Überlappung gibt es dabei für den IPS (Hawes et al. 2019). Zacks (2008) wies in seiner Metaanalyse sogar nach, dass der IPS die konsistentesten und robustesten Aktivitätsmuster bei Aufgaben zur mentalen Rotation zeigt. Dieses Ergebnis führte zu Spekulationen, dass der IPS auch für andere visuell-räumliche Transformationen zuständig sei, etwa für geometrische Translationen (Jordan et al. 2001; Seydell-Greenwald et al. 2017; Zacks 2008).

Zusammenfassend lässt sich auf Basis der bisherigen Evidenz ableiten, dass der IPS und benachbarte parietale Bereiche sowohl für numerische Prozesse als auch für visuell-räumliche Kognitionen eine maßgebliche Rolle spielen. Die Funktionen, die dabei dem IPS zugeschrieben werden, variieren jedoch und erstrecken sich von domänenspezifischen numerischen Funktionen über umfassende Größenrepräsentationen bis hin zu spezifischen visuell-räumlichen Transformationen. Abschließend sei dazu noch die Meta-Analyse von Hawes et al. (2019) erwähnt, die 86 neurowissenschaftliche Arbeiten hinsichtlich der neuroanatomischen Netzwerke des Rechnens, der Zahlenverarbeitung und der Raumvorstellung untersuchten. Dabei zeigte sich, dass es bei allen drei Kognitionsbereichen zu bilateralen Aktivitätsüberlappungen parietaler Regionen in und um den IPS kam.

Die Rolle frontaler Gehirnareale beim Rechnen

Zusätzlich zu den parietalen Arealen sind auch frontale Gehirnregionen während numerischer und visuell-räumlicher Aufgabenstellungen aktiv (Desco et al. 2011; Matejko & Ansari 2015). Verglichen mit dem Interesse an der Erforschung der Aktivitätsmuster parietaler Bereiche, hält sich die Aufmerksamkeit für frontale Bereiche jedoch eher in Grenzen. Dies liegt unter anderem darin begründet, dass den frontalen Gehirnregionen ohnedies domänenübergreifende Funktionen, wie etwa das Arbeitsgedächtnis zugeschrieben werden (Fincham et al. 2002; Owen et al. 2005; Smith & Jonides 1999). Das Arbeitsgedächtnis spielt insbesondere bei mehrstufigen Aufgabenlösungen eine Rolle, da dort Zwischenergebnisse gespeichert werden müssen (Baddeley 1986; 2000). Eine detailliertere Beschreibung der rechenspezifischen Funktionen frontaler Gehirnareale findet sich in der Onlineversion.

Insgesamt zeigt sich, dass die basisnumerische Verarbeitung, wozu auch das arithmetische Faktenwissen (z. B. Einmaleins) zählt, eher in parietalen Bereichen verortet ist, während beim Rechnen ein ganzes Netzwerk an Gehirnarealen involviert ist, wozu auch frontale Gehirnregionen zählen. Zudem werden frontale Gehirnregionen bei mentalen Rotationsaufgaben bemüht, was insbesondere mit dem visuell-räumlichen Arbeitsspeicher und der ebenfalls in frontalen Bereichen lokalisierten motorischen Koordination begründet wird (Zacks 2008).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das frontal-parietale-Netzwerk sowohl für numerische als auch für räumliche Funktionen zuständig ist und gleichsam die neuronale Grundlage der Zahlenverarbeitung und des Rechnens darstellt (Desco et al. 2011; Matejko & Ansari 2015).

2.3 Das (visuell-räumliche) Arbeitsgedächtnis

Um komplexe Rechenaufgaben lösen zu können, ist auch ein intaktes Arbeitsgedächtnis notwendig (Logie et al. 1994; Tronsky 2005). Im Arbeitsgedächtnis werden Gedächtnisinhalte vorübergehend gespeichert und bearbeitet (Baddeley 1986). Die für das Rechnen relevante Komponente des Arbeitsgedächtnisses ist die sogenannte zentrale Exekutive. Dabei handelt es sich in Anlehnung an das populäre Arbeitsgedächtnismodell von Baddeley (1986; 2000) um das supervisorische Kontrollsystem, welches die Aktivitäten der beiden Speichersysteme (visuell-räumlich und verbal) koordiniert. Im visuell-räumlichen Speicher wird entsprechend visuell-räumliches Material, im verbalen sinngemäß verbal-phonologisches Material verarbeitet. Die Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis sind beispielsweise dann sehr hoch, wenn Zehnerüberträge bearbeitet werden müssen, diese aber nicht schriftlich festgehalten werden dürfen, sondern im Arbeitsgedächtnis temporär gespeichert werden (Landerl & Kaufmann 2013, S. 42). Die Überträge werden dabei während des weiteren Ausführens der Rechnung im verbal-phonologischen Arbeitsspeicher subvokal rezitiert. Ist die Kapazität des entsprechenden Arbeitsspeichers reduziert, kann es passieren, dass die Überträge verloren gehen oder „vergessen werden“ und die Rechnung trotz fehlerfreier Anwendung der Rechenprozedur falsch ist (Noël et al. 2001).

Studien zeigen, dass das Arbeitsgedächtnis je nach mathematischen Entwicklungsstand und Alter der Kinder unterschiedlich beansprucht wird (McKenzie et al. 2003; Palmer 2000). Jüngere Kinder (6-7 Jahre) beanspruchen beim mentalen Lösen mathematischer Aufgaben (Kopfrechnen) überwiegend den visuell-räumlichen Arbeitsspeicher, während 8- bis 9-Jährige bei entsprechenden Aufgaben sowohl den visuell-räumlichen als auch den verbal-phonologischen Arbeitsspeicher bedienen (McKenzie et al. 2003). Die Aktivität im visuell-räumlichen Arbeitsspeicher beim Lösen von Rechenaufgaben nimmt also mit zunehmendem Alter ab, während jene der verbal-phonologischen Schleife zunimmt (Li & Geary 2013; Van de Weijer-Bergsma et al. 2015). Es wird dabei angenommen, dass jüngere Kinder im Vergleich zu älteren beim Lösen arithmetischer Probleme stärker auf visuell-räumliche mentale Darstellungen und Strategien (Zahlenstrahl, Zählmaterial, …) angewiesen sind (Liang et al. 2022). Ältere Kinder hingegen konsolidieren das durch Übung gesammelte Faktenwissen (z. B. Einspluseins, Multiplikationsfakten) und rufen es aus dem Langzeitgedächtnis ab, wodurch sie stärker auf den verbalen Arbeitsspeicher angewiesen sind (Gordon et al. 2022). In ähnlicher Weise wenden Grundschulkinder beim Erlernen neuer mathematischer Inhalte enaktive (handelnde) Strategien an, die wiederum verstärkt den visuell-räumlichen Arbeitsspeicher beanspruchen (Cragg et al. 2017). Je vertrauter die Kinder mit dem arithmetischen Stoff werden, desto stärker wird die Aktivierung des verbalen Arbeitsspeichers bei gleichzeitiger Abnahme der Aktivität im visuell-räumlichen Arbeitsspeicher. Letzteres wird damit begründet, dass der verbale Arbeitsspeicher zum Abrufen und zur Aufrechterhaltung gelernter Fakten benötigt wird (Bailey et al. 2012). Eine detaillierte Darstellung der aktuellen (kontroversen) Forschungslage zur Rolle des Arbeitsspeichers beim Lösen von Rechenaufgaben kann in der Onlineversion nachgelesen werden.

Zusammenfassend lässt sich ableiten, dass sowohl der verbale als auch der visuell-räumliche Arbeitsspeicher maßgeblich beim Bearbeiten von Rechenaufgaben beteiligt sind, wenn auch noch weitere differenzierte Analysen hinsichtlich der spezifischen Zusammenhänge ausstehen. Da der visuell-räumliche Arbeitsspeicher auch für Raumvorstellungsaufgaben (z. B. mentale Rotationen) benötigt wird, kann hier ein weiterer indirekter Zusammenhang zwischen dem Rechnen und visuell-räumlicher Kognitionen konstatiert werden.

3 Grundvorstellungen natürlicher Zahlen und der mentale Zahlenstrahl

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, dient dieser Abschnitt dazu, die oben referierten Ergebnisse der Neuro- und Kognitionswissenschaften mit bestehenden fachdidaktischen Konzepten zu verbinden, diese dadurch etwas auszubauen und eine Beziehung beider Wissenschaftsdisziplinen herzustellen.

Als fachdidaktische Antwort auf *mentale Repräsentationen* (wie sie in der Kognitionswissenschaft bezeichnet werden) dient das Konzept der *Grundvorstellungen*. Grundvorstellungen sind nach Rudolf vom Hofe (1995, S. 98) die Beziehung zwischen Mathematik, Individuum und Realität und haben sich in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik längst etabliert. Sie sind mittlerweile auch für zahlreiche mathematische Inhaltsbereiche definiert (z. B. für natürliche Zahlen, Brüche, Funktionen, …). Diese *mathematischen Inhaltsbereiche* werden, wie in 1.2 dargestellt, als *gedankliche Konstrukte, Begriffe* oder *Ideen* bezeichnet. Nun erhebt sich die Frage, was Grundvorstellungen bzw. mentale Repräsentationen leisten müssen, dass sie diese Beziehung zwischen Mathematik, Individuum und Realität leisten können. Dazu müssen sie nicht nur zu unserem „Denken" passen (was mentale Repräsentationen/Grundvorstellungen ja gerade ausmacht), sondern auch mathematisch korrekt sein, um die Beziehung zur Mathematik fehlerfrei herzustellen. Beispielsweise haben Schülerinnen und Schüler in der Regel individuelle, zu ihrer Realität passende Grundvorstellungen zu gedanklichen Konstrukten, die zwar in ihrer subjektiven Vorstellung zum gedanklichen Konstrukt passen, mathematisch jedoch unkorrekt sind (vom Hofe 1995). Solche unrichtigen individuellen Grundvorstellungen (Fehlvorstellungen) müssen im Unterricht erkannt und ehestmöglich zu normativen (auch universellen genannt) Grundvorstellungen transformiert werden.

Als konkretes Beispiel einer korrekten Beziehung zwischen gedanklichem Konstrukt und mentaler Repräsentation sollen hier, passend zum Beitrag, die natürlichen Zahlen dienen. Im Allgemeinen muss zwischen einem gedanklichen Konstrukt und jeglicher Form dessen Repräsentation eine Strukturgleichheit (Isomorphie) gegeben sein (Griesel et al. 2019). Am Beispiel der natürlichen Zahlen heißt das, dass der mentale Zahlenstrahl, der seitens der Kognitions- und Neurowissenschaft als idealtypischer Repräsentant gilt, isomorph zum mathematischen Konstrukt der natürlichen Zahlen passen muss. Ist diese Strukturgleichheit gegeben, kann der mentale Zahlenstrahl als normative/universelle Grundvorstellung bezeichnet werden. Eine Überprüfung dieser Isomorphie zwischen dem mentalen Zahlenstrahl und den natürlichen Zahlen findet sich in der Onlineversion.

Eine andere mentale Repräsentation der natürlichen Zahlen ist die *Mengenvorstellung*. Diese findet insbesondere beim Operationsverständnis der vier Grundrechenarten Anwendung. Beispielsweise aktivieren Schülerinnen und Schüler diese mentale Repräsentation dann häufig, wenn bei Sachrechnungen entschieden werden muss, welche Rechenoperation(en) zur Lösung der Aufgabe führen (Lorenz 2017, S. 134; Griesel et al. 2019, S. 126).

Der *mentale Zahlenstrahl* und die *Mengenvorstellung* natürlicher Zahlen sind dabei keinesfalls zwei voneinander isolierte mentale Repräsentationen. Die Mengenvorstellung zur Zahl 7 beispielsweise lässt sich am mentalen Zahlenstrahl durch die Abschnitte (Zwischenräume) zwischen den Zahlpunkten 0 und 7 realisiert denken (Griesel et al. 2019, S. 126f). Mathematisch gesehen ist die Mengenvorstellung am mentalen Zahlenstrahl sehr nahe mit dem Absolutbetrag einer Zahl verwandt. Für die mentale Repräsentation der Menge einer Zahl als Summe der Abschnitte zwischen zwei Zahlen (meist zwischen 0 und der betreffenden Zahl) ist noch anzumerken, dass diese Abschnitte nicht äquidistant sein müssen.

Dabei wird nach Griesel und Kollegen (2019, S. 127) auch klar, dass wenn wir von *Zahlenräumen* (z. B. Zahlenraum 10), *Nachbarzahlen* oder der *Nähe von Zahlen* sprechen (Gaidoschik 2015, S. 166), es sich keinesfalls um Metaphern handelt. Der Abstand zwischen zwei natürlichen Zahlen am mentalen Zahlenstrahl ist dabei, wie oben beschrieben, als Summe der Zwischenräume aufzufassen. Demnach gibt es zwischen zwei Nachbarzahlen immer genau einen Zwischenraum. Letzteres ist nach Griesel und Kollegen (2019, S. 127) auch die *Grundvorstellung*, die mit dem Begriff *Nachbarzahlen* zu verbinden ist.

Ob auch die bereits in der Einleitung kurz erwähnte Hundertertafel in gleicher Weise wie der *mentale Zahlenstrahl* als mentale Repräsentation der natürlichen Zahlen hilfreich ist, müsste empirisch geklärt werden. Aufgrund dessen, dass für die Hundertertafel dahingehend jedoch kognitions- und neurowissenschaftliche Belege fehlen, sollte man *„mit einer Hochschätzung dieses methodischen Mittels [...] eher zurückhaltend sein"* (Griesel et al. 2019, S. 127).

Zusammenfassend und verallgemeinert lässt sich ableiten, dass sowohl mathematische Objekte (gedankliche Konstrukte) als auch deren mentale Repräsentationen Relationsgebilde sind. Zwischen den Relationsgebilden muss dabei eine Strukturgleichheit (Isomorphie) gegeben sein. Subjektive Vorstellungen zu einem Begriff, die keine Isomorphie zum mathematischen Objekt aufweisen, sind unkorrekt und damit auch keine idealtypischen normativen Grundvorstellungen. In der Fachdidaktik wird hierbei auch oft von Fehlvorstellungen gesprochen. Viele der naiven Vorstellungen der Kinder zu den abstrakten mathematischen Konstrukten sind dabei a priori unkorrekt und müssen im Zuge des Unterrichts zu korrekten Grundvorstellungen, mit denen dann operiert werden kann transformiert werden. (Normative) Grundvorstellungen sind nichts anderes als mentale Repräsentationen mathematischer Objekte und damit das Bindeglied zwischen der Kognitions- und Neurowissenschaft und der Mathematikdidaktik (Griesel et al. 2019, S. 128). Eine umfassendere Darstellung des Grundvorstellungskonzepts kann in der Onlineversion nachgelesen werden.

4. Zusammenfassung und Praxisableitungen

Der vorliegende Beitrag beschreibt die Zusammenhänge zwischen Raumvorstellung und basisnumerischer Verarbeitung sowie dem darauf basierenden Rechnen. Dabei werden überwiegend kognitions- und neurowissenschaftliche Ergebnisse der letzten dreißig Jahre herangezogen und davon drei Erklärungsansätze abgeleitet.

Zahlen benötigen in unseren Gedanken eine Repräsentationsform. Dabei gibt es nicht eine einzige universelle Repräsentationsform, sondern unterschiedlichen Modalitäten wie Zahlen gedacht werden können (Siegler & Opfer 2003). Nach Dehaene etablieren sich im Laufe der kognitiven Entwicklung drei Hauptrepräsentationen von Zahlen, eine verbale, eine visuelle und eine semantische Größenrepräsentation. Letztere, wird auch als mentaler Zahlenstrahl bezeichnet, stellt eine direkte Verbindung zur Raumvorstellung her und dient hier als erster Erklärungsansatz zum Zusammenhang zwischen Raum und Zahl. Zahlreiche Studien konnten mittlerweile nachweisen, dass Zahlen räumlich entlang einer Linie gedacht werden, wobei die einzelnen Zahlen dabei Positionen/Plätze auf dieser Linie einnehmen. Zusätzlich ist diese Zahlenlinie mit einem Richtungssinn versehen. Die theoretische Annahme besteht nun darin, dass Defizite in der Raumvorstellung den Aufbau dieses mentalen Zahlenstrahls erschweren (Hubbard et al. 2005, Zorzi et al. 2002) und es somit zu Schwierigkeiten beim Rechnen (insbesondere Überschlagsrechnen und Schätzen) kommen kann.

Ein zweiter Erklärungsansatz besteht in der neuronalen Verarbeitung. Sowohl die Zahlen- und Mengenverarbeitung als auch die visuell-räumliche Verarbeitung finden zu wesentlichen Teilen im Parietallappen, genauer im intraparietalen Kortex statt (Walsh 2003). Allerdings ist diese neuroanatomisch vergleichbare Lokalisierung nicht zwingend gleichzusetzen mit einer funktionalen Assoziation (Landerl & Kaufmann 2013, S. 127). Es könnten beispielsweise benachbarte Neuronengruppen koaktiviert werden, die jedoch funktionell distinkt sind. Eine Studie, die dieser noch offenen Frage nachging, ist die Metaanalyse von Hawes et al. (2019). Darin wird der Erklärungsansatz über die neuroanatomische Nähe bestärkt und insbesondere die Mengenverarbeitung gleichsam wie die visuell-räumliche Verarbeitung im IPS lokalisiert.

Der dritte Erklärungsansatz für den Zusammenhang zwischen Raum und Zahl liefern Arbeiten zum Arbeitsgedächtnis. Sowohl der verbale als auch der visuell-räumliche Arbeitsspeicher sind maßgeblich beim Lösen komplexer Rechenaufgaben beteiligt. Da der visuell-räumliche Arbeitsspeicher auch für die Bearbeitung räumlicher Aufgaben (z. B. mentale Rotationen) benötigt wird, liegt hier ein weiterer indirekter Erklärungsansatz vor. Da die Befundlage dazu noch sehr widersprüchlich ist, wurde dieser Erklärungsansatz in Abschnitt 2.3 ausführlicher behandelt. Es gibt hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Arbeitsspeicher und Arithmetik noch sehr viel Variabilität, die in jüngeren Studien durch Einflussgrößen wie die Art der Rechenoperation, dem Alter der Probend*innen, der Subdomänen des Arbeitsspeichers und der Art der Rechenaufgabe (Kopfrechnen vs. schriftliches Rechnen) erklärt wird. Nichtsdestotrotz scheint es gesichert zu sein, dass der visuell-räumliche Arbeitsspeicher eine nicht unerhebliche Rolle beim Lösen von Rechenaufgaben spielt.

Die Darstellung dieser drei Erklärungsansätze zeigt, dass die Neuro- und Kognitionswissenschaft in den letzten drei Dekaden sehr viel Evidenz zur Theorie der Zahlenverarbeitung und des Rechnens geleistet hat. Daraus ist abzuleiten, dass visuell-räumliche Fähigkeiten eine für das Rechnen zentrale, domänenübergreifende Kognition ist, der auch im Unterricht (mehr) Aufmerksamkeit gewidmet werden sollte.

Ein weiteres Ziel des Beitrags bestand darin, die Ergebnisse aus der Psychologie friedvoll mit fachdidaktischen Konzepten zu vereinen. Dabei wird ersichtlich, dass die aus der Kognitionswissenschaft stammenden mentalen Repräsentationen, die wir benötigen, um Gedanken konkret werden zu lassen, auch in der (deutschsprachigen) Mathematikdidaktik in Form von Grundvorstellungen längst etabliert sind. Dabei gibt es individuelle Grundvorstellungen, die im Wesentlichen nichts anderes sind, als subjektive Schüler*innenvorstellungen mathematischer Objekte und die häufig auch mathematisch unkorrekt sind und daher als Fehlvorstellungen bezeichnet werden. Normative Grundvorstellungen hingegen sind tatsächlich mentale Repräsentationen gedanklicher mathematischer Objekte (Begriffe, Ideen, …), an die auch hohe fachliche Anforderungen gestellt werden. So müssen normative Grundvorstellungen isomorph zum jeweiligen gedanklichen Konstrukt sein, in anderen Worten, es muss Strukturgleichheit bestehen. Trotz der Tatsache, dass es das Grundvorstellungskonzept schon seit Jahrzehnten gibt und es dazu auch zahlreiche Fortschritte gab, gibt es hierzu nach wie vor offene Fragen und Forschungsbedarf. So existieren beispielsweise noch nicht für alle schulmathematischen Bereiche Grundvorstellungsbeschreibungen. Während die Bereiche Zahlen, Größen, Funktionen und Analysis sehr gut beschreiben sind, sind die Forschungsergebnisse in den Bereichen Geometrie, lineare Algebra und Stochastik noch rar (siehe z. B. vom Hofe 2016).

Insbesondere jedoch besteht hinsichtlich des hier vorgestellten Ansatzes bezüglich des Grundvorstellungskonzepts noch Forschungsbedarf. Heinz Griesel schrieb dazu in seiner letzten wissenschaftlichen Publikation gemeinsam mit seinen Kollegen vom Hofe und Blum (2019, S. 131) sehr treffend: „Weiterer Forschungsbedarf besteht auch in der Frage, in welcher Beziehung das stoffdidaktische Grundvorstellungskonzept zu anderen, international verbreiteten Konzepten mentaler Repräsentationen aus Didaktik und Psychologie steht und inwieweit hier mögliche Verbindungen zu Weiterentwicklungen führen können“. Verwiesen wird auch hier auf bereits bestehende Konzepte wie z. B. „intuitive meaning“ bei Fischbein (1989) bzw. „concept image“ bei Tall und Vinner (1981). Obwohl es dazu bereits Ansätze in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik gibt (vom Hofe & Blum 2016; Prediger 2009), steht eine umfangreiche und differenzierte Aufarbeitung dieses Themas noch aus.

Griesel und Kollegen (2019, S. 131) schlagen für neue Erkenntnisse der Grundvorstellungstheorie unter anderem eine Sichtung von Ergebnissen der kognitiven *Schema*-Theorie wie auch der *Frame*-Theorie vor. Das große Potential des Grundvorstellungskonzepts besteht unter anderem auch darin, dass es einerseits stoffdidaktische Prinzipien weiterführt und andererseits offen für neuere Methoden, Theorien und Forschungsparadigmen ist (Griesel et al. 2019, S. 131). Ein weiteres bislang noch dünn beforschtes, aber nicht zu verachtendes Anwendungsgebiet des Grundvorstellungskonzepts ist der konstruktive Einsatz in der Diagnostik und Förderung. Umfangreiche Ansätze und Ideen finden sich dazu in Wartha und Schulz (2011).

Insbesondere aber kann das Grundvorstellungskonzept, wie im vorliegenden Beitrag gezeigt, eine Verbindung zwischen psychologischen und mathematischen Sichtweisen herstellen und sollte allein deshalb Gegenstand weiterer fachdidaktischer Forschungsbemühungen sein. Nach Ansicht von Griesel und Kollegen (2019, S. 131) handelt es sich einstweilen noch überwiegend um Theorien (Theorie der mental number line, Theorie der Grundvorstellungen, Theorie mentaler Repräsentationen zu gedanklichen Konstrukten), die sich erst empirisch durch erfolgreiche Anwendung in Unterrichtspraxis, Curriculumentwicklung und Einzelexperiment bewähren muss.

4.1 Ableitungen für die Praxis

Dass Raumvorstellung für Geometrie eine wichtige Rolle spielt, scheint außer Zweifel zu stehen. Die hier vorgestellten Ergebnisse signalisieren jedoch, wie bedeutsam Raumvorstellung auch für die Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten ist. Schon Radatz und Rickmeyer (1991) konstatieren, dass die Förderung der Raumvorstellung eines der obersten Ziele des grundschulischen Geometrieunterrichts darstellen sollte. Die Ergebnisse der Kognitions- und Neurowissenschaften der letzten drei Jahrzehnte hinsichtlich der Zahlenverarbeitung und des Rechnens zeigen, wie relevant visuell-räumliche Fähigkeiten auch außerhalb der Geometrie sind. Dadurch wird die Empfehlung von Radatz und Rickmeyer nur nochmals unterstrichen.

In Anbetracht der referierten Befunde wird ein frühes (spielerisches) Schulen der Raumvorstellung empfohlen, um einerseits den Aufbau mentaler Repräsentationen von Zahlen zu erleichtern und andererseits auch den visuell-räumlichen Arbeitsspeicher zu trainieren. Ideen dazu sind beispielsweise kopfgeometrische Aufgaben, mentale Rotationen, mentale Translationen usw. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass alle Faktoren der Raumvorstellung (räumliche Wahrnehmung, Veranschaulichung, räumliche Beziehungen und räumliche Orientierung nach Franke 2007, S. 56) im Unterricht abgedeckt werden. An dieser Stelle sei der Vollständigkeit halber erwähnt, dass es auch noch andere Faktormodelle zur Beschreibung der Raumvorstellung gibt. So beschreibt beispielsweise Maier (1999, S. 51) ein Raumvorstellungsmodell mit fünf Faktoren, das zusätzlich zu den vier genannten noch den Faktor mentale Rotationen beinhaltet. Darüber hinaus gibt es in der Raumvorstellungsforschung auch noch zahlreiche weitere Modelle, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

Ferner sei davor gewarnt, dass der mentale Zahlenstrahl etwa durch verstärkte Übungen am Zahlenstrahl geschult werden kann. Der mentale Zahlenstrahl baut sich durch eine fundamentale Mengenvorstellung auf. Das heißt, dass Zahlen eben gerade nicht ausschließlich als Positionen entlang einer Linie mit bestimmten Zahlwörtern gedacht werden, sondern dass mit der Zahl eine Menge assoziiert wird und sich schließlich ein relationaler Zahlaspekt einstellt (vgl. 3-Ebenenmodell von Krajewski 2003). Ein verfrühtes und alleiniges Üben mit dem Zahlenstrahl würde den ordinalen Zahlaspekt überbewerten und schließlich zu verstärktem zählenden Rechnen führen. Um einen relationalen Zahlaspekt zu generieren, ist es wichtig frühzeitig mit didaktischem Erarbeitungsmaterial enaktive Repräsentationen aufzubauen, die den Kindern dabei helfen, Beziehungen zwischen den Zahlen zu erkennen. Ein Beispiel dafür ist etwa die Methode *Kraft der 5*, bei der die Kinder mit ihren Fingern Relationen zwischen den Zahlen aufbauen können und diese dann als ikonische Repräsentationen abspeichern und schließlich symbolisch für effiziente (nichtzählende) Rechenstrategien nutzen können. Unter dem mentalen Zahlenstrahl versteht man also nicht den klassischen Zahlenstrahl, der dann durch wiederholtes Üben als Hilfsmittel verstanden wird, sondern eine tragfähige und umfangreiche Zahlen-Größen Vorstellung, die es später beispielsweise ermöglicht, die Rechnung 298 + 302 als sehr einfach anzusehen. Da es den Umfang des Beitrags sprengen würde, wird an dieser Stelle nicht weiter auf didaktische Umsetzungsmöglichkeiten eingegangen. Für einen Überblick siehe z. B. Hasemann und Gasteiger (2020). Zudem wird auf die Homepage PIKAS (https://pikas.dzlm.de) und KIRA (https://kira.dzlm.de) verwiesen, wo sich zahlreiche evidenzbasierte Ideen zur praktischen Umsetzung des Aufbaus eines tragfähigen Zahlbegriffs finden.

Abschließend wird noch auf das didaktisch relevante Grundvorstellungskonzept hingewiesen. Bei der Einführung neuer mathematischer Inhalte (Begriffe) sollten individuelle Grundvorstellungen der Schülerinnen und Schüler beobachtet und dokumentiert werden, um darauf aufbauend normative Grundvorstellungen zu generieren. Nur wenn etwaige Fehlvorstellungen transparent werden, ist es möglich diese auszuräumen und mathematisch korrekte, tragfähige Grundvorstellungen aufzubauen. Möglichkeiten subjektive Schüler*innenvorstellungen (individuelle Grundvorstellungen) sichtbar zu machen bestehen beispielsweise darin, die Schüler*innen selbst Zeichnungen dazu anfertigen zu lassen (Oehl 1962, 1965; Griesel et al. 2019, S. 128) oder sie über ihren Lösungsweg zu befragen. Hier steht immer der Prozess im Vordergrund, die Schüler*innen sollen also in eignen Worten erklären, wie sie zur Lösung kommen bzw. welche Gedanken sie dabei haben.

Festzuhalten ist, dass normative Grundvorstellungen gerade im Grundschulalter immer aus der konkreten Handlung heraus aufgebaut werden müssen. Beginnt man beispielsweise ein neues Thema gleich mit dem Schulbuch und überspringt somit (vielleicht aus zeitökonomischen Gründen) die enaktive Phase, führt man den Großteil der Kinder in eine nicht zu bewältigende Abstraktion. Letzteres führt in der Regel dann zu Unverständnis und Frustration. Geht man jedoch den didaktisch (und auch entwicklungspsychologisch) sinnvollen Weg über die Phase der konkreten Handlung, erkennt man, dass auch hier Raumvorstellung eine zentrale Rolle spielt. Denn jedwedes didaktische Arbeitsmaterial ist räumlicher Natur und genau durch dieses haptische Material werden abstrakte mathematische Konzepte für die Kinder erst *greifbar* und *konkret*. Tragfähige Grundvorstellungen etablieren sich also (zumindest im Grundschulbereich) aus der Handlung an *räumlichen* didaktischen Materialien. Hierbei sei abschließend noch erwähnt, dass bei der Arbeit mit didaktischem Material der rechtzeitige Entzug des Materials zu beachten ist. Das zu lange verwenden von Erarbeitungsmaterial birgt die Gefahr, dass der Übergang von konkreten zu abstrakten Repräsentationen verzögert werden kann (Lorenz 2005). Für den Übergang von der konkreten Arbeit am Material hin zur mentalen Repräsentation wird die Vorgangsweise über das sogenannte *Vier-Phasenmodell* (Wartha & Schulz 2011) empfohlen. In diesem Zusammenhang ist noch zu betonen, dass das „Entfernen des Materials“ keinesfalls bedeutet, dass nicht von einem höheren Standpunkt aus wieder auf das Material zurückgegriffen werden soll. Sehr treffend ist hierzu folgendes Zitat von Häsel-Weide et al. (2014, S. 114): „Der Weg der Verinnerlichung führt nie nur vom Material weg, sondern immer wieder auf das Material zurück, um am Material zu erklären, etwas darzustellen oder zu argumentieren.“ Ein konkretes Beispiel hierfür wäre: Wenn es ein Kind schafft, den Übertrag beim schriftlichen Rechnen anhand von Material zu erklären, dann kann davon ausgegangen werden, dass dieses Kind den Übertrag tatsächlich verstanden hat. Ein weiteres Beispiel für die Sekundarstufe I könnte folgend aussehen: Die symbolische Darstellung einer geraden Zahl ist $2n,\ n \in \mathbb{N}$, die einer ungeraden Zahl $2n + 1,\ n \in \mathbb{N}$. Wenn es den Schüler*innen nun gelingt, diesen Sachverhalt durch eine Materialhandlung darzustellen (etwa durch das Bauen eines Würfelturms dessen Grundfläche 2x1 ist und der bei geraden Zahlen oben flach ist und bei ungeraden oben gestuft ist), kann auch hier auf ein tiefes Verständnis geschlossen werden.

Insgesamt wurde in diesem Beitrag versucht, die umfassende Rolle der Raumvorstellung beim Lernen (früher) zentraler mathematischer Inhalte darzustellen. Dabei sind Ergebnisse der Psychologie ebenso eingeflossen wie Konzepte aus der Mathematikdidaktik. Das Hauptziel bestand darin, Resultate aus der kognitions- und neurowissenschaftlichen Grundlagenforschung sichtbar zu machen und diese praxisnah abzubilden. Da es nicht das Mandat des Beitrags war, ausführliche Lernumgebungen zu beschreiben, wurde der letzte Abschnitt bewusst kurzgehalten. Hier sollten lediglich Ableitungen für den Unterricht skizziert und Tipps für weiterführende Literatur gegeben werden.

Literatur

Ansari, D., & Dhital, B. (2006): Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing: an event-related functional magnetic resonance imaging study. *Journal of cognitive neuroscience*, *18*(11), 1820-1828.

Baddeley, A. (2000): The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in cognitive sciences*, *4*(11), 417-423.

Baddeley, A. D. (1986): Working memory. Clarendon, Oxford.

Bailey, D. H., Littlefield, A., & Geary, D. C. (2012): The codevelopment of skill at and preference for use of retrieval-based processes for solving addition problems: Individual and sex differences from first to sixth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(1), 78-92.

Bethell-Fox, C. E., & Shepard, R. N. (1988): Mental rotation: Effects of stimulus complexity and familiarity. *Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance, 14*(1), 12–23.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008): Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, *79*(4), 1016–1031.

Brod, G., Bunge, S. A., & Shing, Y. L. (2017): Does one year of schooling improve children's cognitive control and alter associated brain activation? *Psychological science*, *28*(7), 967-978.

Bruner, J. S. (1964): The course of cognitive growth. *American psychologist*, *19*(1), 1-16.

Butterworth, B. (1999): *The mathematical brain*. London: Macmillan.

Campbell, J. I., & Clark, J. M. (1992): Cognitive number processing: An encoding-complex perspective. In *Advances in psychology* (Vol. 91, pp. 457-491). North-Holland.

Carroll, J. B. (1993): Human Cognitive Abilities: A Survey of Factor- Analytic Studies. Cambridge University Press.

Case, R., & Okamoto, Y. (1996): The role of central conceptual structures in the development of children's thought. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *61*(1–2), Serial No. 246.

Casey, M. B., Nuttall, R., Pezaris, E., & Benbow, C. P. (1995): The influence of spatial ability on gender differences in mathematics college entrance test scores across diverse samples. *Developmental psychology*, *31*(4), 697.

Cattaneo, L., Caruana, F., Jezzini, A., & Rizzolatti, G. (2009): Representation of goal and movements without overt motor behavior in the human motor cortex: a transcranial magnetic stimulation study. *Journal of Neuroscience*, *29*(36), 11134-11138.

Cox, J. W. (1928): Mechanical aptitude. Methuen.

Cragg, L., Richardson, S., Hubber, P. J., Keeble, S., & Gilmore, C. (2017): When is working memory important for arithmetic? The impact of strategy and age. *PloS one*, *12*(12), e0188693.

Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*(1-2), 1-42.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn – Oder warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Dehaene, S. (2013): *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Springer-Verlag.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1995): Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition*, *1*(1), 83-120.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1997): Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, *33*(2), 219-250.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2005): Three parietal circuits for number processing. In *The handbook of mathematical cognition* (pp. 433-453). Psychology Press.

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., & Benke, T. (2003): Learning complex arithmetic - an fMRI study. *Cognitive Brain Research*, *18*(1), 76-88.

Delgado, A. R., & Prieto, G. (2004): Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence, 32*(1), 25–32.

Desco, M., Navas-Sanchez, F. J., Sanchez-González, J., Reig, S., Robles, O., Franco, C., ... & Arango, C. (2011): Mathematically gifted adolescents use more extensive and more bilateral areas of the fronto-parietal network than controls during executive functioning and fluid reasoning tasks. *Neuroimage*, *57*(1), 281-292.

Dietrich, J. F., Huber, S., & Nuerk, H. C. (2015): Methodological aspects to be considered when measuring the approximate number system (ANS) – a research review. *Frontiers in Psychology*, *17*(6), 295.

Fias, W., & Fisher, M. H. (2005): Spatial representation of numbers. In J. I. D. Campbell (Hrsg.), *Handbook of mathematical cognition* (S. 43–54). Hove: Psychology Press.

Fias, W., Menon, V., & Szucs, D. (2013): Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in neuroscience and education*, *2*(2), 43-47.

Fincham, J. M., Carter, C. S., van Veen, V., Stenger, V. A., & Anderson, J. R. (2002): Neural mechanisms of planning: a computational analysis using event-related fMRI. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *99*(5), 3346-3351.

Fischbein, E. (1989): Tacit models and mathematic reasoning. *For the Learning of Mathematics*, *9*, 9–14.

Fischer, U., & Moeller, K. (2014): Aktuelle Befunde zu Zahlenstrahltrainings – Verschiedene Ansätze und deren Wirksamkeit. In G. Schulte-Körne (Hrsg.), *Legasthenie und Dyskalkulie – Neue Methoden zur Diagnostik und Förderung* (S. 33–47). Bochum: Winkler.

Fischer, U., Moeller, K., Cress, U., & Nuerk, H. C. (2011): Embodied spatial numerical training of number magnitude representation – an intervention study. *Psychonomic Bulletin & Reviews*, *18*, 177–183.

Fischer, U., Moeller, K., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2013): Interventions supporting children's mathematics school success: a meta-analytic review. *European Psychologist*, *18*(2), 89–113.

Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen. Seelze: Kallmeyer.

Franke, M., & Reinhold, S. (2007): *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Elsevier, Spektrum, Akad. Verlag.

Gaidoschik, M. (2015): Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraums". *Journal für Mathematik-Didaktik*, *36*(1), 163–190.

Geer, E. A., Quinn, J. M., & Ganley, C. M. (2019): Relations between spatial skills and math performance in elementary school children: A longitudinal investigation. *Developmental Psychology, 55*(3), 637.

Gerstmann, J. (1940): Syndrome of finger agnosia, disorientation for right and left, agraphia and acalculia: Local diagnostic value. *Archives of Neurology & Psychiatry*, *44*(2), 398-408.

Göbel, S. M., Calabria, M., Farne, A., & Rossetti, Y. (2006): Parietal rTMS distorts the mental number line: simulating 'spatial'neglect in healthy subjects. *Neuropsychologia*, *44*(6), 860-868.

Göbel, S. M., Shaki, S., & Fischer, M. H. (2011): The cultural number line: a review of cultural and linguistic influences on the development of number processing. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, *42*(4), 543–565.

Göbel, S., Walsh, V., & Rushworth, M. F. (2001): The mental number line and the human angular gyrus. *NeuroImage*, *14*(6), 1278-1289.

Gordon, R., Santana De Morais, D., Whitelock, E., & Mukarram, A. (2022): Mapping components of verbal and visuospatial working memory to mathematical topics in seven-to fifteen-year-olds. *British Journal of Educational Psychology*, *92*(1), 1-18.

Graß, K.-H., & Krammer, G. (2018): Direkte und indirekte Einflüsse der Raumvorstellung auf die Rechenleistungen am Ende der Grundschulzeit. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *39*(1), 43-67.

Griesel, H., vom Hofe, R., & Blum, W. (2019): Das Konzept der Grundvorstellungen im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *40*(1), 123-133.

Gross, J., Hudson, C., & Price, D. (2009): The long-term costs of numeracy difficulties. Every child a chance trust and KPMG.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2012): The relation between spatial skill and early number knowledge: the role of the linear number line. *Developmental Psychology, 48*(5), 1229–1241.

Hackman, D. A., & Farah, M. J. (2009): Socioeconomic status and the developing brain. *Trends in cognitive sciences*, *13*(2), 65-73.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014): *Ablösung vom zählenden Rechnen.*

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2020): *Anfangsunterricht Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg.

Hawes, Z. & Ansari, D. (2020): What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review, 27*, 465-482.

Hawes, Z., Sokolowski, H. M., Ononye, C. B., & Ansari, D. (2019): Neural underpinnings of numerical and spatial cognition: An fMRI meta-analysis of brain regions associated with symbolic number, arithmetic, and mental rotation. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, *103*, 316-336.

Holmes, G. (1918): Disturbances of visual orientation. *The British journal of ophthalmology*, *2*(9), 449.

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005): Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, *6*(6), 435-448.

Jolles, D., Supekar, K., Richardson, J., Tenison, C., Ashkenazi, S., Rosenberg-Lee, M., ... & Menon, V. (2016): Reconfiguration of parietal circuits with cognitive tutoring in elementary school children. *Cortex*, *83*, 231-245.

Jordan, K., Heinze, H. J., Lutz, K., Kanowski, M., & Jäncke, L. (2001): Cortical activations during the mental rotation of different visual objects. *Neuroimage*, *13*(1), 143-152.

Judd, N., & Klingberg, T. (2021): Training spatial cognition enhances mathematical learning in a randomized study of 17,000 children. *Nature Human Behaviour*, *5*(11), 1548-1554.

Kadosh, R. C., Henik, A., Rubinsten, O., Mohr, H., Dori, H., Van De Ven, V., ... & Linden, D. E. (2005): Are numbers special? The comparison systems of the human brain investigated by fMRI. *Neuropsychologia*, *43*(9), 1238-1248.

Kadosh, R. C., Lammertyn, J., & Izard, V. (2008): Are numbers special? An overview of chronometric, neuroimaging, developmental and comparative studies of magnitude representation. *Progress in neurobiology*, *84*(2), 132-147.

Karmiloff-Smith, A. (1992): *Beyond modularity – a developmental perspective on cognitive science*. Cambridge: MIT Press.

Kovas, Y., & Plomin, R. (2006): Generalist genes: implications for the cognitive sciences. *Trends in cognitive sciences*, *10*(5), 198-203.

Krajewski, K. (2003): *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburge: Kovač.

Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., ... & von Aster, M. (2011): Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*, *57*(3), 782-795.

Landerl, K., & Kaufmann, L. (2013): Dyskalkulie: Modelle. *Diagnostik, Intervention*. UTB-Verlag.

Landerl, K., Vogel, S., & Kaufmann, L. (2022): *Dyskalkulie: Modelle, Diagnostik, Intervention*. UTB.

Li, Y., & Geary, D. C. (2013): Developmental gains in visuospatial memory predict gains in mathematics achievement. *PloS one*, *8*(7), e70160.

Liang, Z., Dong, P., Zhou, Y., Feng, S., & Zhang, Q. (2022): Whether verbal and visuospatial working memory play different roles in pupil's mathematical abilities. *British Journal of Educational Psychology*, *92*(2), 409-424.

Lindemann, O., & Fischer, M. H. (2015): Cognitive foundations of human number representations and mental arithmetic. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *The oxford handbook of numerical cognition* (S. 35–44). Oxford: Oxford University Press.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985): Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. *Child Development, 56*(6), 1479–1498.

Logie, R. H., Gilhooly, K. J., & Wynn, V. (1994): Counting on working memory in arithmetic problem solving. *Memory & cognition*, *22*, 395-410.

Lorenz, J. H. (2005): Grundlagen der Förderung und Therapie. Wege und Irrwege. *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*, 165-177.

Lorenz, J. H. (2017): Einige Anmerkungen zur Repräsentation von Wissen über Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *38*(1), 125-139.

Lyons, I. M., Nuerk, H. C., & Ansari, D. (2015): Rethinking the implications of numerical ratio effects for understanding the development of representational precision and numerical processing across formats. *Journal of Experimental Psychology: General*, *144*(5), 1021–1035.

Lyons, I. M., Vogel, S. E., & Ansari, D. (2016): On the ordinality of numbers: A review of neural and behavioral studies. *Progress in brain research*, *227*, 187-221.

Maier, P. H. (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen: ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen: mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht.* Donauwörth: Auer.

Matejko, A. A., & Ansari, D. (2015): Drawing connections between white matter and numerical and mathematical cognition: a literature review. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, *48*, 35-52.

Mayer, E., Martory, M. D., Pegna, A. J., Landis, T., Delavelle, J., & Annoni, J. M. (1999): A pure case of Gerstmann syndrome with a subangular lesion. *Brain*, *122*(6), 1107-1120.

McCloskey, M. (1992): Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, *44*(1-2), 107-157.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985): Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and cognition*, *4*(2), 171-196.

McKenzie, B., Bull, R., & Gray, C. (2003): The effects of phonological and visual–spatial interference on children's arithmetical performance. *Educational and Child Psychology, 20*, 93−108.

Mix, K. S., & Cheng, Y.-L. (2012): The relation between space and math: developmental and educational implications. *Advances in Child Development and Behavior, 42*, 197–243.

Moeller, K., Fischer, U., Nuerk, H. C., & Cress, U. (2015): Computers in mathematics education – training the mental number line. *Computers in Human Behavior*, *48*, 597–607.

Morra, S., Gobbo, C., Marini, Z., & Sheese, R. (2008): *Cognitive development – neopiagetion perspectives*. New York: Lawrence Erlbaum.

Newcombe, N. S., & Shipley, T. F. (2015): Thinking about spatial thinking: New typology, new assessments. *Studying Visual and Spatial Reasoning for Design Creativity*, 179–192.

Nieder, A., & Dehaene, S. (2009): Representation of number in the brain. *Annual review of neuroscience*, *32*, 185-208.

Noël, M. P., Désert, M., Aubrun, A., & Seron, X. (2001): Involvement of short-term memory in complex mental calculation. *Memory & cognition*, *29*(1), 34-42.

Nuerk, H. C., & Willmes, K. (2004): Externe und interne Repräsentation von Zahlen und ihre Beeinflussung durch sprachliche Struktur. *Medialität und Mentalität; Linz, E., Jager Hrsg, L., Eds*, 251-274.

Nuerk, H. C., Graf, M., & Willmes, K. (2006): Grundlagen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens. *Sprache· Stimme· Gehör*, *30*(04), 147-153.

Nuerk, H. C., Wood, G., & Willmes, K. (2005): The universal SNARC effect: the association between number magnitude and space is amodal. *Experimental Psychology*, *52*, 187–194.

Obersteiner, A., Reiss, K., & Ufer, S. (2013): How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. *Learning and Instruction*, *23*, 125–135.

Oehl, W. (1962): *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel.

Oehl, W. (1965): *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Hannover: Schroedel.

Owen, A. M., McMillan, K. M., Laird, A. R., & Bullmore, E. (2005): N-back working memory paradigm: A meta-analysis of normative functional neuroimaging studies. *Human brain mapping*, *25*(1), 46-59.

Palmer, S. (2000): Working memory: A developmental study of phonological recoding. *Memory, 8,* 179– 193.

Parsons, S., & Bynner, J. (2005): Does numeracy matter more?

Paterson, D. G., Elliot, R., Anderson, L. D., Toops, H. A., & Heidbreder, E. (1930): Minnesota mechanical ability tests: The report of a re- search investigation subsidized by the committee on human migrations of the national research council and conducted in the department of psychology of the University of Minnesota. University of Minnesota Press.

Patro, K., Nuerk, H. C., & Cress, U. (2015): Does your body count? Embodied influences on the preferred counting direction of preschoolers. *Journal of Cognitive Psychology*, *27*(4), 413–425.

Pinel, P., Piazza, M., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004): Distributed and overlapping cerebral representations of number, size, and luminance during comparative judgments. *Neuron*, *41*(6), 983-993.

Polspoel, B., Peters, L., Vandermosten, M., & De Smedt, B. (2017): Strategy over operation: neural activation in subtraction and multiplication during fact retrieval and procedural strategy use in children. *Human Brain-Mapping*, *38*(9), 4657-4670.

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematik-unterricht in der Sekundarstufe I* (S. 213–234). Weinheim: Beltz.

Radatz, H., & Rickmeyer, K. (1991): Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Reinert, R. M., Huber, S., Nuerk, H. C., & Moeller, K. (2015a): Multiplication facts and the mental number line: evidence from unbounded number line estimation. *Psychological Research*, *79*(1), 95–103.

Reinert, R. M., Huber, S., Nuerk, H. C., & Moeller, K. (2015b): Strategies in unbounded number line estimation? Evidence from eye-tracking. *Cognitive Processing*, *16*(1), 359–363.

Roggeman, C., Fias, W., & Verguts, T. (2015): Basic number representation and beyond: neuroimaging and computational modelling. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *The oxford handbook of numerical cognition* (S. 566–582). Oxford: Oxford University Press.

Rumelhart, D. E. (1980): Schemata: the building blocks of cognition. In R. J. Spiro, B. C. Bruce & W. F. Brewer (Hrsg.), *Theoretical issues in reading comprehension* (S. 33–58). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Seel, N. M. (2003): Psychologie des Lernens (2. akt. u. erw. Aufl.). *Ernst Reinhardt (UTB): München*.

Seydell-Greenwald, A., Ferrara, K., Chambers, C. E., Newport, E. L., & Landau, B. (2017): Bilateral parietal activations for complex visual-spatial functions: Evidence from a visual-spatial construction task. *Neuropsychologia*, *106*, 194-206.

Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971): Mental rotation of three- dimensional objects. *Science, 171*(3972), 701–703.

Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998): SCADS: a model of children’s strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science*, *9*(5), 405–410.

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003): The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological science*, *14*(3), 237-250.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008): Playing linear numerical board games promotes low-income children’s numerical development. *Developmental Science*, *11*(5), 655–661.

Simon, O., Mangin, J. F., Cohen, L., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2002): Topographical layout of hand, eye, calculation, and language-related areas in the human parietal lobe. *Neuron*, *33*(3), 475-487.

Smith, E. E., & Jonides, J. (1999): Storage and executive processes in the frontal lobes. *Science*, *283*(5408), 1657-1661.

Sokolowski, H. M., Fias, W., Mousa, A., & Ansari, D. (2017): Common and distinct brain regions in both parietal and frontal cortex support symbolic and nonsymbolic number processing in humans: A functional neuroimaging meta-analysis. *Neuroimage*, *146*, 376-394.

Sommerauer, G., Graß, K.-H., Grabner, R. H., & Vogel, S. E. (2020): The semantic control network mediates the relationship between symbolic numerical order processing and arithmetic performance in children. *Neuropsychologia*, *141*, 107405.

Stengel, E. (1944): Loss of spatial orientation, constructional apraxia, and Gerstmann's syndrome. *Journal of Mental Science*, *90*(380), 753-760.

Szűcs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2014): Cognitive components of a mathematical processing network in 9-year-old children. *Developmental science*, *17*(4), 506-524.

Tall, D., & Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–165.

Thurstone, L. L., & Thurstone, T. G. (1941): Factorial studies of intelli- gence. *Psychometric Monographs, 2*, 94.

Tronsky, L. N. (2005): Strategy use, the development of automaticity, and working memory involvement in complex multiplication. *Memory & Cognition*, *33*, 927-940.

Uttal, D. H., Miller, D. I., & Newcombe, N. S. (2013): Exploring and enhancing spatial thinking: Links to achievement in science, technology, engineering, and mathematics? *Current Directions in Psychological Science*, *22*(5), 367-373.

Van de Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2015): Verbal and visual-spatial working memory and mathematical ability in different domains throughout primary school. *Memory & cognition*, *43*, 367-378.

van Dijck, J.-P., Ginsburg, V., Girelli, L., & Gevers, W. (2015): Linking numbers to space: from the mental number line towards a hybrid account. In R. C. Kadosh & A. Dowker (Hrsg.), *The oxford handbook of numerical cognition* (S. 89–105). Oxford: Oxford University Press.

Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., & Newcombe, N. (2017): Links between spatial and mathematical skills across the preschool years. *Monographs of Society for Research in Child Development, 82*(1), 7–30.

Verdine, B. N., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., Newcombe, N. S., & Bailey, D. H. (2017): Links between spatial and mathematical skills across the preschool years. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *82*(1), 1-149.

Verguts, T., Fias, W., & Stevens, M. (2005): A model of exact small-number representation. *Psychonomic bulletin & review*, *12*, 66-80.

Vogel, S. E., & De Smedt, B. (2021): Developmental brain dynamics of numerical and arithmetic abilities. *npj Science of Learning*, *6*(1), 22.

vom Hofe, R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Springer Spektrum.

vom Hofe, R., & Blum, W. (2016): “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(Supplement 1), 225–254.

Walsh, V. (2003): A theory of magnitude: common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in cognitive sciences*, *7*(11), 483-488.

Ward, J. (2006): *The student’s guide to cognitive neuroscience*. New York: Psychology Press.

Wartha, S., & Schulz, A. (2011): *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. Kiel: IPN. Publikation des Programms SINUS an Grundschulen.

Zacks, J. M. (2008): Neuroimaging studies of mental rotation: a meta-analysis and review. *Journal of cognitive neuroscience*, *20*(1), 1-19.

Zhang, X., Koponen, T., Räsänen, P., Aunola, K., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2014): Linguistic and spatial skills predict early arithmetic development via counting sequence knowledge. *Child Development, 85*(3), 1091–1107.

Zorzi, M., Priftis, K., & Umiltà, C. (2002): Neglect disrupts the mental number line. *Nature*, *417*(6885), 138-139.

Verfasser

Karl-Heinz Graß
Pädagogische Hochschule Steiermark
Institut für Elementar- und Primarpädagogik
Hasnerplatz 10
8010 Graz

karl1.grass@phst.at